МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ, МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

УТВЕРЖДАЮ

Директор
(должность)
Лоцев Г.В
(ФИО)
3 сентября____2026 г.

Практикум по теории упругости

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **3 ЗЕТ**
Часов по учебному плану 108
в том числе:
аудиторные занятия 50
самостоятельная работа 57,9

Виды контроля в семестрах:
зачет с оценкой 5

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**5 (3.1)**		Итого	
Недель	17 2/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	16	16	16	16
Практические	34	34	34	34
Контактная работа в период теоретического обучения	0,1	0,1	0,1	0,1
В том числе инт.	2	2	2	2
Итого ауд.	50	50	50	50
Контактная работа	50,1	50,1	50,1	50,1
Сам. работа	57,9	57,9	57,9	57,9
Итого	108	108	108	108

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

к.т.н, Джаманкулов Азамат Кенешбекович

Рецензент(ы):
к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович

д.т.н, Муслимов Аннас Поясович

Согласовано РОП:
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рабочая программа дисциплины
Практикум по теории упругости

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"
утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1
Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.
Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Практикум по теории упругости

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Цель освоения дисциплины - формирование у студента знаний и навыков в области постановки и решения задач теории упругости с использованием тензорного исчисления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.В.1.ДВ.06
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Б1.О.3.02. Теоретическая механика
2.1.2	Б1.О.3.03. Сопротивление материалов
2.1.3	Б1.О.2.02. Математический анализ
2.1.4	Б1.О.3.12. Аналитическая механика
2.1.5	Б1.О.2.03. Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2.1.6	Б1.О.2.04. Дифференциальные уравнения
2.1.7	Б1.О.2.05. Теория вероятностей и математическая статистика
2.1.8	Б1.О.2.06. Физика
2.1.9	Б1.О.3.13. Уравнения математической физики
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Б1.В.1.02. Основы теории пластичности и ползучести
2.2.2	Б1.О.3.15. Программные системы компьютерной математики
2.2.3	Б3.О.01. Междисциплинарная итоговая государственная аттестация по национально-региональному компоненту
2.2.4	Б3.О.03. Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы
2.2.5	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
2.2.6	Б1.В.1.01. Теория упругости

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ПК-1: Способностью применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследования, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности	
Знать:	
Уровень 1	Физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности;
Уровень 2	
Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности;
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	физико-математическим аппаратом для проведения исследований; навыками использования математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности
Уровень 2	
Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	Знает ключевые понятия и определения, этапы жизненного цикла проекта, роль команды и
3.1.2	руководителя проекта
3.1.3	Знает понятие ограничений проекта, перечень задач, план и бюджет проекта
3.1.4	Знает на уровне понятий и определений образ результата
3.1.5	Знает, как использовать инструменты и методы управления временем при выполнении

3.1.6	конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей
3.1.7	Знает основы системного подхода к решению поставлненных задач
3.1.8	Знает структуру и способы проведения презентации
3.1.9	Физико-механические процессы и явления Информационные технологии, наукоемкие
3.1.10	компьютерные технологии, расчетно-экспериментальные технологии, производственные
3.1.11	технологии Материалы, в первую очередь новые, перспективные, многофункциональные
3.1.12	и "интеллектуальные материалы"
3.2	**Уметь:**
3.2.1	Умеет формулировать цели и задачи проекта, определять основные этапы.
3.2.2	Умеет разрабатывать план реализации проекта, разрабатывать бюджет проекта
3.2.3	Умеет решать задачи заявленного качества в установленное время, при необходимости
3.2.4	корректируя способы их решения
3.2.5	Умеет определять приоритеты в выполнении конкретных задач, проектов, при достижении
3.2.6	поставленных целей
3.2.7	Умеет осуществлять поиск и анализ информации, умеет выполнить анализ альтернатив
3.2.8	исходя из целей проекта
3.2.9	Умеет подготовить и провести презентацию проекта
3.3	**Владеть:**
3.3.1	Владеет способом представления образа результата проекта, приемами составления плана
3.3.2	проекта
3.3.3	Владеет навыками распределения времени для выполнения конкретных задач, проектов с
3.3.4	учетом их приоритетности
3.3.5	Владеет методами генерации идей
3.3.6	Владеет навыками формулировки цели проекта и задач, обеспечивающих достижение
3.3.7	цели проекта
3.3.8	Владеет навыками оценки решения поставленных задач в соответствии с
3.3.9	запланированными результатами контроля, корректировки способов решения задач
3.3.10	Владеет приемами разработки и проведения презентации

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Тензорное описание напряжений и деформаций. Уравнения и постановки линейной теории упругости							

1.1	Тензор напряжений и напряжения на площадке Сплошная среда и малые деформации как допущения расчёта упругой детали; отличие локального напряжения от результирующего внутреннего усилия. Векторы, тензоры второго ранга и правило суммирования по повторяющимся индексам; компоненты тензора в декартовом базисе. Вектор напряжений на площадке с нормалью n и формула Коши $t_i = \sigma_{ij}n_j$; нормальная и касательная составляющие. Симметрия тензора напряжений из баланса моментов в классической среде; преобразование компонент при повороте ортонормированного базиса. Главные напряжения, главные направления и инварианты; интерпретация напряжённого состояния в точке нагруженного кронштейна. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1			
1.2	Вычисление напряжений на площадке по формуле Коши. Главные напряжения и преобразование тензора при повороте базиса. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1			
1.3	Перемещения и тензор малых деформаций Поле перемещений и его градиент; разделение локального движения на деформацию и малый поворот. Соотношения Коши $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$; различие тензорной деформации εxy и инженерного сдвига γxy = 2εxy. Изменение длины отрезка заданного направления, главные деформации и объёмная деформация. Совместность деформаций и физический смысл уравнений Сен-Венана; двумерная проверка εxx,yy + εyy,xx = 2εxy,xy. Восстановление перемещений по простому совместному полю деформаций; неопределённость с точностью до движения твёрдого тела. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1			

1.4	Вычисление деформаций и малых поворотов по полю перемещений. Проверка совместности и восстановление простого поля перемещений /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1			
1.5	Закон Гука и упругая энергия. Линейное упругое поведение; запись $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ и назначение тензора упругости без подробного разбора классов анизотропии. Изотропный закон Гука $\sigma = 2G\varepsilon + \lambda\, tr(\varepsilon)I$ и обратные соотношения; связь E, ν, G, K и λ. Матрица упругости при использовании инженерных сдвигов; согласование порядка компонент и коэффициентов. Одноосное растяжение и стеснённая поперечная деформация как разные состояния; влияние коэффициента Пуассона. Плотность энергии $W = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$, положительная определённость и допустимые константы изотропного материала; проверка размерностей. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1			
1.6	Расчёт деформаций по пространственному закону Гука. Преобразование упругих констант и вычисление плотности энергии. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1			
1.7	Краевые задачи и проверка допустимости решения. Локальные уравнения статического равновесия $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ и единицы объёмной силы. Силовые и кинематические граничные условия на дополняющих частях границы; смешанная постановка и недопустимость произвольного задания обоих условий на одной компоненте. Система уравнений в перемещениях для однородного изотропного тела; выбор неизвестных и алгоритм постановки задачи. Единственность решения при достаточном закреплении; равновесие нагрузок и свободные движения в чисто силовой задаче. Принцип Сен-Венана и контроль решения по равновесию, граничным условиям и совместности на примере растянутой детали. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1			

1.8	Постановка смешанной краевой задачи для упругой детали. Проверка равновесия и граничных условий заданного поля напряжений. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1			
1.9	Проработка индексной записи и самостоятельная проверка главных напряжений и инвариантов тензора. Проверка совместности заданного поля деформаций и оформление восстановления перемещений. Сопоставление упругих констант и расчёт энергии при двух видах ограничения деформаций. Подготовка постановки краевой задачи и проверка равновесия внешних нагрузок. /Ср/	5	26	ПК-1	Л1.1Л2.1			
	Раздел 2. Аналитические решения инженерных задач							
2.1	Плоская задача и функция напряжений Эри. Плоское напряжённое состояние тонкой пластины и плоская деформация протяжённого тела; выбор модели и ненулевые поперечные компоненты. Двумерные соотношения упругости для обеих моделей; почему их матрицы жёсткости различаются. Функция Эри при отсутствии объёмных сил: σxx = Φ,yy, σyy = Φ,xx, τxy = −Φ,xy. Бигармоническое уравнение ΔΔΦ = 0 для однородного изотропного материала; подбор простого полинома по условиям на границе. Полиномиальное поле для однородного растяжения и чистого изгиба полосы; проверка точечных условий и результирующих усилий. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1			
2.2	Сопоставление плоского напряжённого состояния и плоской деформации. Построение и проверка полиномиальной функции Эри. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1			

2.3	Осесимметричная задача для толстостенного цилиндра. Радиальные перемещения и напряжения в цилиндрических координатах; допущения осевой симметрии. Радиальное равновесие $d\sigma r/dr + (\sigma r - \sigma\theta)/r = 0$ при отсутствии объёмных сил. Решение Ламе $\sigma r = A - B/r^2$, $\sigma\theta = A + B/r^2$; определение постоянных по внутреннему и наружному давлению. Выбор осевого условия: открытые торцы, закрытые торцы или заданная осевая деформация; влияние на σz и радиальное перемещение. Поиск опасной зоны, проверка знаков давления и граничных значений; использование решения как эталона численного расчёта. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1			
2.4	Определение напряжений в толстостенном цилиндре по решению Ламе. Влияние осевого закрепления на напряжения и перемещения цилиндра. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1			
2.5	Кручение стержней и геометрическая концентрация напряжений. Кручение Сен-Венана прямого стержня: угол закручивания на единицу длины, касательные напряжения и депланация. Круглый вал как частное решение без депланации; отличие поведения некруглых сечений. Постановка задачи с функцией Прандтля для односвязного сечения: уравнение Пуассона, условие на контуре и связь с моментом; обзор без решения произвольного сечения. Концентрация напряжений у круглого отверстия в широкой пластине; коэффициент 3 для бесконечной пластины при одноосном растяжении и границы применимости. Различие конечного концентратора и сингулярности у острого угла или точечной силы; выбор места сравнения расчётных напряжений. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.6	Расчёт круглого вала на кручение и проверка энергетического баланса. Оценка концентрации напряжений у круглого отверстия. /Пр/	5	4	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.7	Слабая форма задачи и верификация конечноэлементного расчёта. Принцип виртуальных работ для линейной упругости; допустимые перемещения и естественные граничные условия. Переход к слабой форме и к системе Ku = f; смысл матриц B и C и интегрирования по элементу без вывода полной библиотеки элементов. Выбор плоской или осесимметричной модели, материала, нагрузок и закреплений; устранение движений твёрдого тела. Верификация на однородном растяжении и решении Ламе: баланс реакций, сопоставление перемещений и напряжений с эталоном. Сеточная сходимость по фиксированной величине; влияние усреднения напряжений, сингулярностей и почти несжимаемого материала на интерпретацию результата. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1			
2.8	Построение плоской конечноэлементной модели однородного растяжения. Сеточная сходимость модели цилиндра при осевой симметрии. Защита и взаимная проверка аналитического и численного решений. /Пр/	5	6	ПК-1	Л1.1Л2.1	2		Работа в команде
2.9	Вывод компонент напряжений по функции Эри и сравнение двух плоских моделей. Параметрическое исследование решения Ламе при изменении отношения радиусов. Сравнение аналитического решения кручения и оценки концентрации у отверстия. Обработка результатов расчёта на трёх сетках. /Ср/	5	31,9	ПК-1	Л1.1Л2.1			
2.10	Консультации и сдача зачета /КрТО/	5	0,1	ПК-1	Л1.1Л2.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

Вопросы для текущего контроля
Лекция 1
1. Чем тензор напряжений отличается от вектора напряжений на площадке?
2. Как получить нормальную и касательную составляющие для заданной нормали?
3. Какие величины не изменяются при повороте базиса и почему?
Лекция 2
4. Как выделить деформацию и поворот из градиента перемещений?
5. Почему инженерный сдвиг вдвое больше εxy?
6. Зачем проверять совместность перед восстановлением перемещений?
Лекция 3

7. Как записать прямой и обратный закон Гука для изотропного тела?
8. Как ограничения поперечных деформаций изменяют напряжённое состояние?
9. Какие ограничения на E и ν обеспечивают положительную энергию?
Лекция 4
10. Какие уравнения и данные составляют замкнутую краевую задачу?
11. Почему свободная модель имеет неединственное поле перемещений?
12. Чем различаются точечные граничные условия и условия на результирующие усилия?
Лекция 5
13. Когда применяется плоское напряжённое состояние, а когда плоская деформация?
14. Какие уравнения равновесия удовлетворяются автоматически функцией Эри?
15. При каких допущениях функция Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению?
Лекция 6
16. Как задаются знаки радиальных напряжений от давления на двух границах цилиндра?
17. Как изменяются σz и ur при изменении условий на торцах?
18. Какие величины удобнее использовать для проверки решения Ламе?
Лекция 7
19. Почему круглый вал не депланирует в задаче кручения Сен-Венана?
20. Какие условия задаются для функции Прандтля в односвязном сечении?
21. Почему коэффициент концентрации 3 нельзя переносить на произвольную пластину?
Лекция 8
22. Чем слабая постановка отличается от сильной?
23. Какие проверки выявляют ошибку закрепления вычислительной модели?
24. Почему рост максимального напряжения при сгущении сетки не всегда означает ошибку решателя?
Расчётные задания для текущего контроля
Задание 31. Тензор напряжений
В точке σ = [[80,30,0],[30,20,0],[0,0,0]] МПа, n = (1/√2, 1/√2, 0). Найти вектор напряжений, нормальное напряжение, модуль касательного напряжения и главные напряжения.
Задание 32. Поле перемещений
Для u = ax + by, v = cx + dy, w = 0, где a = 0,001; b = 0,002; c = −0,001; d = −0,0003, найти тензор малых деформаций, γxy, ωz и объёмную деформацию.
Задание 33. Закон Гука
Изотропный материал E = 200 ГПа, ν = 0,3; σxx = 100 МПа, прочие компоненты напряжений равны нулю. Найти деформации, G, K и плотность энергии.
Задание 34. Проверка равновесия
Прямоугольная область 0 ≤ x ≤ 1 м, 0 ≤ y ≤ 1 м. Задано σxx = kx, σyy = 0, τxy = 0, k = 2 МПа/м. Определить b для равновесия, векторы напряжений на всех гранях и итоговую внешнюю силу на единицу толщины.
Задание 35. Функция Эри
При отсутствии объёмных сил Φ = σ₀y²/2, σ₀ = 60 МПа. Найти напряжения, проверить бигармоничность и вычислить деформации для E = 200 ГПа, ν = 0,3 при двух плоских моделях. Координаты заданы в метрах.
Задание 36. Цилиндр Ламе
Длинный толстостенный цилиндр a = 50 мм, b = 100 мм, pi = 10 МПа, po = 0. Найти A, B и напряжения на поверхностях. При свободных от осевой нагрузки открытых торцах определить ur(a), если E = 200 ГПа, ν = 0,3; краевыми эффектами пренебречь.
Задание 37. Кручение круглого вала
Сплошной круглый вал R = 10 мм, L = 1 м, G = 80 ГПа; момент T = 100 Н·м. Найти Jp, τmax, угол закручивания и упругую энергию.
Задание 38. Проверка сходимости
Эталонное перемещение 0,100 мм. На трёх последовательно сгущённых сетках получены 0,092; 0,097; 0,099 мм. Рассчитать относительные ошибки, межсеточные изменения и оценить выполнение критерия: ошибка относительно эталона не более 2 %.
Вопросы для промежуточной аттестации
1. Выведите формулу Коши для напряжений и объясните роль нормали.
2. Объясните вычисление главных напряжений и проверку инвариантов.
3. Получите тензор малых деформаций по заданному полю перемещений.
4. Объясните совместность и восстановление перемещений с точностью до жёсткого движения.
5. Запишите прямую и обратную формы изотропного закона Гука.
6. Обоснуйте связь E, ν, G, K и положительность упругой энергии.
7. Составьте полную смешанную краевую задачу линейной упругости.
8. Поясните условия существования и единственности в силовой задаче.
9. Сравните плоское напряжённое состояние и плоскую деформацию.
10. Получите напряжения по функции Эри и проверьте граничные условия.
11. Объясните решение Ламе и определение его постоянных.
12. Сопоставьте осевые условия для открытых и закрытых торцов цилиндра.
13. Получите напряжения и угол закручивания круглого вала.
14. Поясните постановку кручения с функцией Прандтля.
15. Опишите пределы применения решения для круглого отверстия и роль сингулярностей.
16. Запишите принцип виртуальных работ и объясните его связь с МКЭ.
17. Составьте план верификации расчёта с использованием аналитического эталона.

18. Объясните сеточную сходимость, усреднение напряжений и выбор контролируемой величины.
Расчётная часть промежуточной аттестации формируется из заданий З1–З8 с изменением числовых данных при сохранении проверяемого способа решения. Для задач на вычислительную механику допускаются приведённые таблицы результатов вместо запуска решателя.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Курсовых работ не предусмотрено

5.3. Фонд оценочных средств

6 1 Назначение и связь с содержанием дисциплины
ФОС оценивает применение физико-математического аппарата, расчётных методов и компьютерного моделирования в рамках ПК-1, указанной в аннотации. В таблице приведены предметные результаты для данного ФОС; они не являются официальными индикаторами образовательной программы.
Содержание Проверяемое действие Оценочные средства
Лекции 1–2 Вычислить напряжения и деформации и проверить тензорные соотношения ПР 1–4; Т1–Т4; З1–З2; КР 1
Лекции 3–4 Применить закон Гука и корректно поставить краевую задачу ПР 5–8; Т5–Т7; З3–З4; КР 1
Лекции 5–7 Выбрать аналитическую модель и проверить решение ПР 9–14; Т8–Т9; З5–З7; КР 2
Лекция 8 Верифицировать численный расчёт и обосновать точность ПР 15–17; Т10; З8; индивидуальная работа

6 2 Организация текущего контроля
На практических занятиях проверяются расчётная схема, ход решения и самостоятельность объяснения. Для детальной оценки выбираются четыре работы: ПР 2, ПР 6, ПР 10 и ПР 16. Остальные работы используются для обратной связи и устранения пробелов без добавления отдельных рейтинговых баллов. Тест проводится после лекции 8; контрольная работа 1 — после лекции 4, контрольная работа 2 — после лекции 7. Все формы текущего контроля выполняются в пределах выделенных занятий и самостоятельной работы.
Средство Максимум Основание оценки
Тематический тест Т1–Т10 10 По 1 баллу за верный ответ
Четыре проверяемые практические работы 20 По 5 баллов по единой рубрике
Контрольная работа 1 15 Постановка 3; вычисления 8; проверка 4
Контрольная работа 2 15 Выбор модели 3; решение 8; проверка 4
Индивидуальная расчётная работа 20 Схема 4; аналитика 4; численная модель 4; верификация 6; защита 2
Промежуточная аттестация 20 Два вопроса по 5 баллов и одна задача 10 баллов
Итого 100 Предлагаемая шкала для согласования

Рубрика практической работы на 5 баллов: расчётная схема и допущения — 1; корректные формулы и вычисления — 2; проверка единиц и условий — 1; самостоятельное объяснение результата — 1. За частично выполненный пункт допускается половина его балла. Ошибка в выборе физической модели исключает полный балл за расчёт и требует исправления.
6 3 Тематический тест
В каждом пункте выберите один правильный ответ. Рекомендуемое время — 15 минут. Разрешён непрограммируемый калькулятор; справочные формулы не требуются.
Т1 Вектор напряжений на площадке определяется выражением
А $t = \sigma n$; Б $t = \mathrm{tr}(\sigma) n$; В $t = \varepsilon n$; Г $t = E n$.
Т2 Какое свойство имеет тензор напряжений в классической среде без моментных напряжений
А всегда диагонален; Б симметричен; В имеет нулевой след; Г имеет только положительные компоненты.
Т3 Как связаны γ_{xy} и ε_{xy} при малых деформациях
А $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy}$; Б $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy}/2$; В $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$; Г $\gamma_{xy} = -\varepsilon_{xy}$.
Т4 Для постоянных малых деформаций в односвязной области условие совместности
А выполняется; Б нарушается всегда; В требует $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$; Г требует $\mathrm{tr}\,\varepsilon = 0$.
Т5 Модуль сдвига изотропного материала равен
А $E/(1-\nu)$; Б $E/[2(1+\nu)]$; В $3E(1-2\nu)$; Г $E\nu$.
Т6 Каковы допустимые параметры устойчивого изотропного линейно упругого материала
А $E > 0$, $-1 < \nu < 0{,}5$; Б $E < 0$, $\nu > 0{,}5$; В $E > 0$, любое ν; Г $E = 0$, $\nu = 0{,}5$.
Т7 Неединственность перемещений при чисто силовых условиях связана
А с обязательной анизотропией; Б с движениями твёрдого тела; В с нулевыми напряжениями во всех случаях; Г с невозможностью задать давление.
Т8 При плоской деформации выполняется
А $\sigma_{zz} = 0$ всегда; Б $\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; В $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$; Г $\tau_{xy} = 0$ всегда.
Т9 На внутренней поверхности цилиндра с положительным внутренним давлением p_i
А $\sigma_r = p_i$; Б $\sigma_r = 0$; В $\sigma_r = -p_i$; Г $\sigma_\theta = -p_i$ всегда.
Т10 Какая проверка убедительнее одной цветовой карты напряжений
А увеличение масштаба деформаций; Б смена палитры; В баланс реакций, сравнение с эталоном и сеточная сходимость; Г только успешное завершение решателя.
Ключ: Т1 — А; Т2 — Б; Т3 — В; Т4 — А; Т5 — Б; Т6 — А; Т7 — Б; Т8 — Б; Т9 — В; Т10 — В. Неверный ответ или отсутствие ответа — 0 баллов; штрафов нет.
6 4 Контрольные работы
Рекомендуемая продолжительность каждой работы — 45 минут в пределах практического занятия. Разрешены калькулятор и одностраничный справочник формул, утверждённый преподавателем. При оценивании сохраняются баллы за корректные

последующие действия с ранее ошибочно вычисленной величиной, если физическая модель остаётся верной.
КР 1 — тензоры и постановка задачи. Вариант А: задания З1, З3 и З4; оценка соответственно 5, 5 и 5 баллов. Вариант Б: в З1 использовать σ = [[60,20,0],[20,60,0],[0,0,10]] МПа и прежнюю нормаль; в З3 принять σxx = 120 МПа, E = 210 ГПа, ν = 0,3; в З4 принять k = 3 МПа/м. Требуемые действия совпадают с вариантом А.
КР 2 — аналитические решения. Вариант А: задания З5, З6 и З7; по 5 баллов. Вариант Б: в З5 принять σ_0 = 80 МПа; в З6 принять pi = 15 МПа при прежней геометрии, po = 0; в З7 принять T = 150 Н·м при прежних R, L и G.
Для каждого задания контрольной работы: постановка и допущения — 1 балл; вычисления — до 8/3 балла; проверка и интерпретация — до 4/3 балла. По трём заданиям получается 3 + 8 + 4 = 15 баллов. Итог округляется до 0,5 балла только после суммирования.
6 5 Эталоны решений для преподавателя
З1. t = (77,782; 35,355; 0) МПа; σn = 80 МПа; |τn| = 30 МПа; главные напряжения 92,426; 7,574; 0 МПа.
З2. εxx = 0,001; εyy = −0,0003; εxy = 0,0005; γxy = 0,001; ωz = (v,x − u,y)/2 = −0,0015 рад; tr ε = 0,0007.
З3. εxx = 0,0005; εyy = εzz = −0,00015; G = 76,923 ГПа; K = 166,667 ГПа; W = 25 000 Дж/м³.
З4. b = (−2·10⁶,0) Н/м³. На x = 1 м t = (2,0) МПа, на x = 0 и y = 0;1 м t = 0. Поверхностная сила 2·10⁶ Н/м по x компенсируется объёмной силой −2·10⁶ Н/м.
З5. σxx = 60 МПа, σyy = τxy = 0; ΔΔΦ = 0. Плоское напряжённое состояние: εxx = 0,0003, εyy = εzz = −0,00009. Плоская деформация: σzz = 18 МПа, εxx = 0,000273, εyy = −0,000117, εzz = 0.
З6. A = 3,333 МПа; B = 33 333,333 МПа·мм²; σr(a) = −10 МПа, σr(b) = 0; σθ(a) = 16,667 МПа, σθ(b) = 6,667 МПа; σz = 0; ur(a) = a[σθ(a) − νσr(a)]/E = 0,004917 мм.
З7. Jp = πR⁴/2 = 1,5708·10⁻⁸ м⁴; τmax = 63,662 МПа; φ = 0,079577 рад; U = Tφ/2 = 3,9789 Дж.
З8. Ошибки 8; 3; 1 %. Изменения относительно более тонкого результата: 5,155 % и 2,020 %. Только третья сетка выполняет критерий относительно эталона; три значения сами по себе не доказывают универсальную сходимость метода.
КР 1, вариант Б: З1 — t = (56,569; 56,569; 0) МПа, σn = 80 МПа, τn = 0; главные напряжения 80, 40, 10 МПа. З3 — εxx = 0,000571429; εyy = εzz = −0,000171429; G = 80,769 ГПа; K = 175 ГПа; W = 34 285,714 Дж/м³. З4 — bx = −3·10⁶ Н/м³; напряжение на правой грани 3 МПа, на остальных гранях ноль; результирующие силы ±3·10⁶ Н/м.
КР 2, вариант Б: З5 — σxx = 80 МПа; при плоском напряжённом состоянии εxx = 0,0004, εyy = εzz = −0,00012; при плоской деформации σzz = 24 МПа, εxx = 0,000364, εyy = −0,000156. З6 — A = 5 МПа; B = 50 000 МПа·мм²; σr(a) = −15 МПа; σθ(a) = 25 МПа; σθ(b) = 10 МПа; ur(a) = 0,007375 мм. З7 — τmax = 95,493 МПа; φ = 0,119366 рад; U = 8,9525 Дж; Jp не изменяется.
6 6 Индивидуальная расчётная работа
Тема — верификация решения для толстостенного цилиндра под внутренним давлением. Принять линейный изотропный материал E = 200 ГПа, ν = 0,3, внутренний радиус a = 50 мм, наружное давление po = 0, осевую деформацию εz = 0. Использовать осесимметричную постановку с подавлением торцевых эффектов и фиксировать это допущение в отчёте. Варианты: 1 — b/a = 1,5, pi = 5 МПа; 2 — b/a = 2, pi = 10 МПа; 3 — b/a = 2,5, pi = 15 МПа; 4 — b/a = 3, pi = 20 МПа. Преподаватель предоставляет шаблон конечноэлементной модели; студент отвечает за данные, граничные условия и проверку результата.
• Составить схему, записать уравнение равновесия и граничные условия σr(a) = −pi, σr(b) = 0.
• Получить A и B, построить σr(r), σθ(r); вычислить σz = 2νA и ur = (1+ν)[(1−2ν)Ar + B/r]/E для плоской деформации.
• Построить или настроить осесимметричную модель с тем же осевым ограничением; не подменять её моделью открытых торцов.
• Выполнить расчёт минимум на трёх сетках с последовательным уменьшением характерного размера; зафиксировать тип и порядок элементов.
• Сравнить ur(a) и σθ в фиксированной внутренней точке r = (a+b)/2 с эталоном. Для выбранной модели предварительный учебный ориентир относительной ошибки — не более 3 %; при превышении объяснить причину и уточнить модель.
• Для равновесия проверить нормы невязок или баланс сил на корректно выделенном секторе. Нулевая суммарная векторная сила по полному кругу сама по себе не является достаточной проверкой осесимметричной модели.
• Представить исходные данные, аналитические формулы, настройки, таблицу сеток, графики, расчёт ошибок и вывод о пределах достоверности. Приложить файл модели или скрипт.
Объём отчёта ориентировочно 5–8 страниц без приложений. Работа выполняется за счёт самостоятельной работы по лекциям 6 и 8 и обсуждается на ПР 16–17. Рубрика на 20 баллов приведена в разделе 6.2. При отсутствии доступа к решателю преподаватель предоставляет таблицы результатов трёх сеток; студент выполняет аналитическое сравнение, проверку ошибок и защиту. В таком варианте не заявляется проверка самостоятельного построения модели.
6 7 Промежуточная аттестация и критерии
Рабочий вариант — зачёт по результатам собеседования и письменной задачи. Билет содержит два вопроса из раздела 5 и одну задачу З1–З8 с согласованными числовыми данными. Рекомендуемая подготовка — 30 минут, ответ и обсуждение — до 10 минут на студента; это предложение по процедуре, а не расшифровка 0,1 контактного часа в аннотации.
Примеры комплектов: билет 1 — вопросы 1 и 9, З6; билет 2 — вопросы 3 и 11, З7; билет 3 — вопросы 5 и 16, З1; билет 4 — вопросы 7 и 17, З5. Задачи сопровождаются всеми исходными данными из соответствующего пункта.
Каждый теоретический ответ оценивается до 5 баллов: 2 — корректность понятий и уравнений; 2 — объяснение допущений и физического смысла; 1 — применение к инженерному примеру. Расчётная задача оценивается до 10 баллов: 2 — модель; 5 — метод и вычисления; 2 — проверка; 1 — интерпретация.
Предлагаемые условия «зачтено»: суммарно не менее 60 из 100 баллов, за аттестацию не менее 10 из 20 и за индивидуальную работу не менее 10 из 20. Все три условия выполняются одновременно. Иначе — «не зачтено» с указанием требующих исправления элементов.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Краткий устный опрос по физическому смыслу величин, уравнений и граничных условий.

Тематический тест по тензорам, деформациям, закону Гука и постановкам краевых задач.
Проверяемые расчёты по практическим работам с устной защитой выбранного решения.
Две письменные контрольные работы по аналитическим методам.
Индивидуальная расчётная работа с сопоставлением аналитического и численного решений.
Отчёт о верификации вычислительной модели и сеточной сходимости.
Итоговое собеседование и расчётное задание для промежуточной аттестации

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Амензаде Ю.А.	Теория упругости: учебник для университетов	М.: Высшая школа 1976

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Рудаев Я.И.	Основы теории упругости: учебник	Бишкек: Изд-во КРСУ 2020

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Рудаев Я.И.	Кручение упругих стержней: учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2008

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	Python с NumPy, SciPy, SymPy и Matplotlib — тензорные и матричные вычисления, символическое дифференцирование, обработка данных и построение графиков. Учебные скрипты должны явно задавать систему единиц. https://docs.scipy.org/doc/scipy/ ; https://docs.sympy.org/
6.3.1.2	Scilab — альтернативная среда для матричных расчётов, решения линейных систем и построения зависимостей напряжений и перемещений. https://www.scilab.org/software
6.3.1.3	FEniCSx с DOLFINx — реализация слабой формы и решение учебных задач линейной упругости на подготовленных шаблонах. Это среда программирования задач, поэтому настройку окружения и исходный шаблон предоставляет преподаватель. https://docs.fenicsproject.org/dolfinx/main/python/demos/demo_elasticity.html
6.3.1.4	ParaView — визуализация полей и обработка результатов конечноэлементного расчёта; используется совместно с решателем. https://www.paraview.org/

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	Math-Net.Ru — поиск публикаций по математике и механике; для курса полезны материалы по краевым задачам, уравнениям упругости и численным методам. https://www.mathnet.ru/
6.3.2.2	eLIBRARY.RU — библиографический поиск российских научных публикаций и поиск доступных полных текстов по механике деформируемого твёрдого тела. Условия доступа к отдельным материалам проверяются при использовании. https://elibrary.ru/
6.3.2.3	Springer Nature Link — поиск научных книг и статей по solid mechanics, elasticity и finite element methods. Полные тексты доступны в зависимости от режима публикации и подписки. https://link.springer.com/
6.3.2.4	ScienceDirect — поиск исследований по вычислительной механике и материалам, в том числе в International Journal of Mechanical Sciences и Mechanics of Materials. Доступ к полным текстам определяется условиями публикации и подписки. https://www.sciencedirect.com/
6.3.2.5	
6.3.2.6	Учебные и технические справочные ресурсы
6.3.2.7	Applied Mechanics of Solids А. Ф. Бауэра — авторский открытый справочник по уравнениям механики, линейной упругости и аналитическим решениям. https://solidmechanics.org/
6.3.2.8	Официальная документация DOLFINx, SciPy и SymPy — справочные сведения о вычислительных операциях и примеры программной реализации.

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7 1 Подготовка к изучению тем
Перед началом курса повторите операции с матрицами, собственные значения симметричной матрицы, частные производные и основы равновесия из теоретической механики и сопротивления материалов. Ведите единый список обозначений. Для каждой величины фиксируйте физический смысл и единицы. Записи в декартовых и цилиндрических координатах не смешивайте без преобразования.
Перед лекцией просмотрите её вопросы и выпишите непонятные обозначения. После лекции самостоятельно восстановите ключевые формулы и решите короткий пример. Для тензорных соотношений полезно параллельно записывать индексную

и матричную формы. Проверяйте свободные и повторяющиеся индексы; в суммировании один повторяющийся индекс используется дважды в одном члене.

7 2 Порядок решения расчётной задачи

• Нарисуйте тело, оси, нагрузки и закрепления. Укажите, где допустимы линейная упругость и малые деформации.

• Выберите пространственную, плоскую или осесимметричную модель и объясните выбор через геометрию и условия нагружения.

• Запишите неизвестные, уравнения равновесия, кинематические и физические соотношения, затем условия на каждой части границы.

• Приведите данные к согласованным единицам. При использовании Н и мм напряжения выражайте в Н/мм² = МПа, а модуль Е — в тех же единицах напряжения.

• Получите аналитическое решение или настройте предоставленную вычислительную модель. Сначала проверьте простой предельный случай.

• Проверьте единицы, знаки, равновесие, граничные условия и зависимость результата от параметров. Для численного решения дополнительно исследуйте влияние сетки.

• Сформулируйте физический вывод: какие компоненты определяют состояние, где расположена опасная зона и какие допущения ограничивают вывод.

7 3 Работа по разделам курса

Лекции 1–2. Проверяйте единичную длину нормали и симметрию тензора. Главные направления нормируйте, а главные напряжения сопоставляйте с инвариантами. При расчёте деформаций не теряйте множитель 1/2 в єху; поворот твёрдого тела не должен создавать малую деформацию.

Лекции 3–4. Перед применением закона Гука определяйте, какие компоненты заданы, а какие равны нулю по физической модели. Нулевая деформация не означает нулевое напряжение. Проверяйте, достаточно ли закреплений для исключения жёстких движений и не переопределены ли условия.

Лекции 5–6. При работе с функцией Эри сначала вычисляйте напряжения, затем проверяйте бигармоничность и граничные нагрузки. Для цилиндра начинайте со знаков σr на обеих поверхностях. Радиальное перемещение вычисляйте по формулам, соответствующим выбранному осевому условию.

Лекция 7. Для кручения отделяйте геометрическую характеристику сечения от характеристик материала. В задачах концентрации задавайте номинальное напряжение и размеры области, для которых применим выбранный коэффициент. Не сравнивайте без пояснений напряжение в сингулярной точке с аналитическим конечным значением.

Лекция 8. До расчёта определите контролируемые величины и координаты точек сравнения. Сравнивайте результаты в одинаковых точках и согласуйте способ получения напряжений: в точках интегрирования, после экстраполяции или усреднения. Сохраняйте все параметры сетки и расчёта.

7 4 Самостоятельная работа и отчётность

Распределяйте 57,9 часа самостоятельной работы по темам раздела 3. Сначала завершайте разбор предыдущего раздела, затем переходите к новой постановке. В отчёте приводите схему, исходные данные, допущения, формулы, промежуточные результаты, проверку и вывод. Графики подписывайте с указанием величин и единиц; цветовую карту сопровождайте легендой и описанием условий расчёта.

Сохраняйте вычисления в воспроизводимом виде: отдельный блок исходных данных, последовательность операций и автоматическое построение таблиц или графиков. Указывайте название и версию использованной программы. Не подменяйте проверку задачи готовым ответом из решателя. При использовании внешней формулы приводите источник и условия применимости.

7 5 Подготовка к текущему контролю и аттестации

Используйте вопросы раздела 5 как план повторения. Для каждого метода подготовьте объяснение исходных допущений, неизвестных, уравнений, граничных условий и способов проверки. Решите 31–38 без обращения к эталонам, затем сравните ход решения и объясните расхождения. При подготовке защиты индивидуальной работы убедитесь, что можете воспроизвести изменение одного исходного параметра и предсказать направление изменения результата.

На консультацию приносите конкретный вопрос, схему и выполненные вычисления. Отмечайте место, где нарушается равновесие или перестаёт выполняться граничное условие. Такой разбор позволяет исправить причину ошибки и применить способ решения к новому варианту.